

# Биреляционная семантика и отмеченные секвенциальные исчисления интуиционистских кондициональных логик

Зайцев Игорь Васильевич

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

8 апреля 2025 г.

- 1 **Интуиционистские кондициональные логики: введение**
- 2 Интуиционистские модальные и интуиционистские кондициональные логики
- 3 Синтаксис и теория доказательств гильбертовского типа
- 4 Кондициональная биреляционная семантика
- 5 Отмеченные секвенциальные исчисления

- 1 Кондициональная логика осуществляет формализацию отношения следования и выделения класса общезначимых формул в отношении условных выражений, прежде всего, контрфактуалов.
- 2 Два вида условных выражений: индикативные кондиционалы и контрфактические кондиционалы.
- 3 Различие в наклонении фундирует различие в условиях истинности (Adams 1970; Lewis 1973, p. 3):  
Если Освальд не убил Кеннеди, то это сделал кто-то другой **vs** Если бы Освальд не убил Кеннеди, то это сделал бы кто-то другой.
- 4 Подход к семантике контрфактуалов через применение аппарата семантики возможных миров (семантика модельных сфер, сравнительной возможности, селективной функции, реляционная семантика с отношениями достижимости, индексированными пропозициями) (Stalnaker 1968; Lewis 1973; Chellas 1975; Segerberg 1989; Nute 1980).
- 5 Формальные свойства кондициональных логик: невалидность правил **усиления** **антецедента**, **контрапозиции**, **транзитивности** (и ряд других).

- Работа Й. Вайса "Basic intuitionistic conditional logic" (Weiss 2018, 2019):
  - Разработка интуиционистской кондиц. логики по аналогии с интуиционистской модальной логикой, в частности, логикой  $\mathbf{HK}\Box$  К. Дошена и М. Божича (Božić, Došen 1984)
  - Интуиционистских аналог базовой кондициональной логики Б. Челласа (Chellas 1975) – логика  $\mathbf{ICK}$  с единственной кондициональной связкой  $>$  (гильбертовское исчисление)
  - Реляционная семантика Б. Челласа с двумя отношениями достижимости – кондициональным и интуиционистским
  - Определение негативной трансляции Геделя, аналогов трансляций МакКинси-Тарского-Геделя, погружение модальной логики в кондициональную посредством интерпретации выражения  $\Box B$  как  $\top > B$
  - Определение слабых расширений с аксиомами ID и CMP
  - Демонстрация невозможности собственного интуиционистского аналога логики Сталнакера с аксиомой конд. искл. третьего:

$$(A > B) \vee (A > \neg B)$$

- Работы И. Чиарделли и С. Лью (Liu 2018; Ciardelli, Liu 2019; Ciardelli, Liu 2020), главная статья – "Intuitionistic conditional logics" (2020):
  - Интерпретация интуиционистской импликации как эпистемологического условия, а кондициональной – как онтического
  - Модифицированная биреляционная семантика типа К. Сегерберга (Segerberg 1989) с замкнутым вверх кондициональным отношением достижимости
  - Определение (полных и корректных) интуиционистских аналогов (с единственной кондициональной связкой  $>$ ) сильных логик семейства  $\mathbf{V}$  Д. Льюиса ( $\mathbf{IV}$ ,  $\mathbf{IVW}$ ,  $\mathbf{IVC}$ ) и логики Сталнакера  $\mathbf{C2}$  с аксиомой дистрибутивности  $>$  относительно  $\vee$  (аксиомой детерминированности):

$$(A > (B \vee C)) \rightarrow ((A > B) \vee (A > C))$$

- Оставленная ими открытой на тот момент проблема формализации интуиционистских кондициональных логик с двумя контрфактическими связками Льюиса – сильной  $\Box \rightarrow$  и слабой  $\Diamond \rightarrow$

- Работа Г.К. Ольховикова "An intuitionistically complete system of basic intuitionistic conditional logic" (Olkhovikov 2024):
  - Определение альтернативной базовой интуиционистской кондициональной логики **IntCK** с двумя контрфактическими связками
  - Модификация биреляционной семантики для случая оценки истинности  $\Diamond\rightarrow$ , а также обновленное условие истинности для сильной кондициональной связки  $\Box\rightarrow$
  - Определение стандартной трансляции интуиционистской кондициональной логики в интуиционистскую логику первого порядка

Так, И. Чиарделли и С. Лью отмечают: «Точно так же, как  $\forall$  и  $\exists$  не взаимозаменяемы в интуиционистской логике предикатов, а  $\Box$  и  $\Diamond$  не взаимозаменяемы в интуиционистской модальной логике, также  $\Box \rightarrow$  и  $\Diamond \rightarrow$  не будут взаимозаменяемы в интуиционистской кондициональной логике. Чтобы зафиксировать возможные условия в интуиционистском контексте, нам нужно добавить  $\Diamond \rightarrow$  в язык в качестве нового примитива... В этой расширенной свойства  $\Box \rightarrow$  не однозначно определяют свойства  $\Diamond \rightarrow$ . Таким образом, становится особенно интересно взглянуть на такую модификацию интуиционистской кондициональной логики в условиях, когда алфавит включает оба оператора» (Ciardelli, Liu 2020, p. 830).

Особенность логики Г.К. Ольховикова как раз и состоит в том, что она формализует в интуиционистском контексте не один тип кондициональной связи, как это имеет место в логиках, определенных Й. Вайсом (Weiss 2018, 2019), И. Чиарделли и С. Лью (Ciardelli, Liu 2019, 2020), являющихся кондициональными аналогами интуиционистской модальной логики М. Божича и К. Дошена  $\mathbf{HK}\Box$  (Božić, Došen 1984), а два – сильную и слабую контрфактическую связь. По Д. Льюису, эти связки представляют собой кондициональные аналоги, соответственно, операторов  $\Box$  и  $\Diamond$  (Lewis 1973, pp. 22–24), а потому подобного рода кондиционалы должны быть разработаны так, как это имеет место в логике алетических модальностей.

- 1 Интуиционистские кондициональные логики: введение
- 2 Интуиционистские модальные и интуиционистские кондициональные логики**
- 3 Синтаксис и теория доказательств гильбертовского типа
- 4 Кондициональная биреляционная семантика
- 5 Отмеченные секвенциальные исчисления

В общем случае можно описать три способа построения интуиционистской модальной логики (Wolter, Zakharyashev 1999):

- во-первых, можно взять классическую минимальную нормальную модальную логику **K** в языке с одной исходной модальностью  $\Box$  (в языке  $\mathcal{L}_{\Box}$ ) и постулатами  $(\Box A \wedge \Box B) \rightarrow \Box(A \wedge B)$  и  $\Box \top$  (а также правилами **RM** и **MP**) и заменить аксиомы **CL** на аксиомы **Int** (примерами таких систем будут являться системы М. Божича и К. Дошена **HK $\Box$**  и ее расширения (Božić, Došen 1984, Došen 1985)): в этих логиках оператор возможности  $\Diamond$  может быть определен стандартным образом посредством отрицания и оператора  $\Box$ ;

- во-вторых, в качестве примитива мы можем взять оператор  $\Diamond$ , построив логику в языке  $\mathcal{L}_\Diamond$  точно так же, как и в первом случае, в качестве модальных аксиом взяв  $\Diamond(A \vee B) \rightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B)$  и  $\neg \Diamond \perp$  (а также метаправило вывода  $A \rightarrow B / \Diamond A \rightarrow \Diamond B$  с **MP**) (Božić, Došen 1984, Sotirov 1984, Wolter 1997);

- в-третьих, можно взять операторы  $\Box$  и  $\Diamond$  в языке  $\mathcal{L}_{\Box\Diamond}$  с различным набором аксиом (в частности, система  $HK\Box\Diamond$  Божича и Дошена) (Božić, Došen 1984).

Описанные Й. Вайсом, И. Чиарделли и С. Лью интуиционистские кондициональные логики были построены по принципу первых систем в языке  $\mathcal{L}_{>}$ . Но, как было показано М. Божичом, К. Дошеном и А. Симпсоном, обогащение языка в первых двух типах систем одним из отсутствующих операторов не увеличивает ее дедуктивную силу: например, связка  $\Diamond$  оказывается определяемой через  $\Box$ , в силу того что в системе  $HK\Box\Diamond$  добавляются схемы  $\Diamond A \vee \Box \neg A$  и  $\neg(\Diamond A \wedge \neg \Box A)$ , посредством которых оказывается доказуемой схема  $\Diamond A \leftrightarrow \neg \Box \neg A$  (Božić, Došen 1984, p. 239; Simpson 1994, pp. 41–50). Поэтому эти типы логик не подходят для построения кондициональной логики с двумя независимыми типами контрфактической связи.

Тем самым, для того чтобы построить систему, которая давала бы адекватную интуиционистскую интерпретацию двум контрфактическим связкам Льюиса и при этом удовлетворяла важному конструктивному свойству независимости, а также ряду других, например дизъюнктивному свойству, необходимо выбрать базовую интуиционистскую модальную логику, построенную по третьему типу, отличную от системы  $\mathbf{HK}\Box\Diamond$ .

На эту роль может быть выбрано несколько систем, существующих в исследовательской литературе (Dalmonte 2020; Simpson 1994):

На эту роль может быть выбрано несколько систем, существующих в исследовательской литературе (Dalmonte 2020; Simpson 1994):

- система конструктивной динамической модальной логики для параллельных программ **CCDL** Д. Виджесекеры (Wijesekera 1990);

- логика конструктивной модальности **СК** Дж. Беллина, В. Де Пайва, Э. Риттера (Bellin, De Paiva, Ritter 2001);

- система интуиционистской базовой модальной логики **IK**, независимо предложенная Ж. Фишер Серви, У. Эвальдом, Г. Плоткиным, К. Стирлингом (Fischer Servi 1984; Ewald 1986; Plotkin, Stirling 1986) и обстоятельно исследованная в диссертации А. Симпсона (Simpson 1994);

- система интуиционистской базовой модальной логики **IK**, независимо предложенная Ж. Фишер Серви, У. Эвальдом, Г. Плоткиным, К. Стирлингом (Fischer Servi 1984; Ewald 1986; Plotkin, Stirling 1986) и обстоятельно исследованная в диссертации А. Симпсона (Simpson 1994);

- недавно определенная система «естественной» интуиционистской модальной логики **FIK** Ф. Бальбани, Х. Гао, Ч. Генчер, Н. Оливетти (Balbani, Gao, Gencer, Olivetti 2024);

Две главные традиции: собственно **интуиционистская** и **конструктивная** модальные логики.

Две главные традиции: собственно **интуиционистская** и **конструктивная** модальные логики.

### Интуиционистская модальная логика **IK** и **FIK**

- Естественный интерес в комбинировании двух типов логик.
- Определение интуиционистских аналогов «классических» модальностей.
- Философский анализ.

Две главные традиции: собственно **интуиционистская** и **конструктивная** модальные логики.

### Интуиционистская модальная логика **IK** и **FIK**

- Естественный интерес в комбинировании двух типов логик.
- Определение интуиционистских аналогов «классических» модальностей.
- Философский анализ.

### Конструктивная модальная логика **CCDL** и **CK**

- Мотивированы приложениями в computer science.
- Теоретико-типовая интерпретация.
- Репрезентация знания.

Две главные традиции: собственно **интуиционистская** и **конструктивная** модальные логики.

### Интуиционистская модальная логика IK и FIK

- Естественный интерес в комбинировании двух типов логик.
- Определение интуиционистских аналогов «классических» модальностей.
- Философский анализ.

### Конструктивная модальная логика CCDL и CK

- Мотивированы приложениями в computer science.
- Теоретико-типовая интерпретация.
- Репрезентация знания.

Отличия: конструктивные модальные логики не удовлетворяют свойству дистрибутивности  $\Diamond$  относительно  $\vee$  –  $\Diamond(A \vee B) \rightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B)$ , – а значит, оператор  $\Diamond$  **не является нормальным**.

Из всех представленных логик наибольшим интересом обладает логика **ИК** (также называемая логикой Фишер Серви **FS** (Wolter, Zakharyashev 1999)), ибо:

- в **ИК** очень просто определяется стандартная трансляция модальных формул в интуиционистскую логику предикатов и тем самым осуществляется адекватная интерпретация модальных операторов в терминах квантификации по возможным мирам (Simpson 1994, pp. 59–61; Wolter, Zakharyashev 1999, pp. 228–229);
- в **ИК** доказываются метатеоремы о независимости модальных операторов и наличии дизъюнктивного свойства;
- Симпсоном предлагается вполне естественный формализм в виде маркированных натуральных исчислений (Simpson 1994);
- **ИК** является нормальной как относительно  $\Box$ , так и относительно  $\Diamond$ .

Также **IK** является единственной интуиционистской модальной логикой, удовлетворяющей 6 дезидератам А. Симпсона (Simpson 1994, pp. 38–41).

Также **IK** является единственной интуиционистской модальной логикой, удовлетворяющей 6 дезидератам А. Симпсона (Simpson 1994, pp. 38–41).

### Желательные метасвойства для интуиционистских модальных логик (IML)

- 1 **IML** должна быть консервативным расширением **Int**.
- 2 **IML** должна содержать все частные случаи теорем **Int** и быть замкнутой относительно правила **MP**.
- 3 Добавление к аксиоматике **IML** схемы  $A \vee \neg A$  (или  $\neg\neg A \rightarrow A$ ) в немодальный фрагмент языка  $\mathcal{L}_{\Box\Diamond}$  индуцирует классическую пропозициональную логику.
- 4 Если схема  $A \vee B$  является теоремой **IML**, то либо схема  $A$  – теорема **IML**, либо схема  $B$  – теорема **IML**.
- 5 Операторы  $\Box$  и  $\Diamond$  не являются выразимыми друг через друга в **IML**.
- 6 Существует интуиционистски приемлемое объяснение значения алетических модальностей, по отношению к которому **IML** является корректной и полной.

Г.К. Ольховиковым интуиционистская кондициональная логика, строящаяся как кондициональный аналог модальной логики **IK**, то есть логика **IntCK**, объявляется корректной версией интуиционистской кондициональной логики, ввиду того что обеспечивается сильная полнота относительно интуиционистского прочтения ее метатеории и естественных реляционных моделей, причем является полностью кондициональной, поскольку позволяет формализовать как слабую, так и сильную контрфактические связки, а значит, и решается проблема, поставленная И. Чиарделли и С. Лью.

Однако отметим, что для разных целей можно выбрать иную интуиционистскую модальную логику, в отношении которой будет строиться ее кондициональный вариант, и тем самым получать различные системы с неэквивалентными свойствами различных типов контрфактуалов, в том числе получать и ненормальные системы.

- 1 Интуиционистские кондициональные логики: введение
- 2 Интуиционистские модальные и интуиционистские кондициональные логики
- 3 Синтаксис и теория доказательств гильбертовского типа**
- 4 Кондициональная биреляционная семантика
- 5 Отмеченные секвенциальные исчисления

## Синтаксис кондиционально-интуиционистских логик

Зададим понятие **формулы** посредством следующей грамматики (в форме BN) в языке  $\mathcal{L}_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow}$  (множество всех формул будем обозначать как  $Fm_{\mathcal{L}_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow}}$ , в дальнейшем опуская нижний индекс для удобства):

### Определение

$$A, B := p_i \mid \neg A \mid (A \wedge B) \mid (A \vee B) \mid (A \rightarrow B) \mid (A \Box \rightarrow B) \mid (A \Diamond \rightarrow B)$$

## Синтаксис кондиционально-интуиционистских логик

Зададим понятие **формулы** посредством следующей грамматики (в форме BN) в языке  $\mathcal{L}_{\Box, \Diamond}$  (множество всех формул будем обозначать как  $Fm_{\mathcal{L}_{\Box, \Diamond}}$ , в дальнейшем опуская нижний индекс для удобства):

### Определение

$$A, B := p_i \mid \neg A \mid (A \wedge B) \mid (A \vee B) \mid (A \rightarrow B) \mid (A \Box \rightarrow B) \mid (A \Diamond \rightarrow B)$$

- $p_i \in Var_{\mathcal{L}_{\Box, \Diamond}}$ , где  $i \in \mathbb{N}$ ,  $Var_{\mathcal{L}_{\Box, \Diamond}}$  – счетное множество проп. пер. (будем обозначать как  $p, q, r, \dots$ ) (в дальнейшем нижний индекс  $Var_{\mathcal{L}_{\Box, \Diamond}}$  будет опускаться);
- $(A \Box \rightarrow B)$  – выражение с сильной кондициональной (контрфактической) связкой, читается как «если бы было  $A$ , то обязательно было бы  $B$ »;
- $(A \Diamond \rightarrow B)$  – выражение со слабой кондициональной (контрфактической) связкой, читается как «если бы было  $A$ , то, вероятно, было бы  $B$ ».

## Синтаксис кондиционально-интуиционистских логик

Зададим понятие **формулы** посредством следующей грамматики (в форме BN) в языке  $\mathcal{L}_{\Box, \Diamond}$  (множество всех формул будем обозначать как  $Fm_{\mathcal{L}_{\Box, \Diamond}}$ , в дальнейшем опуская нижний индекс для удобства):

### Определение

$$A, B := p_i \mid \neg A \mid (A \wedge B) \mid (A \vee B) \mid (A \rightarrow B) \mid (A \Box \rightarrow B) \mid (A \Diamond \rightarrow B)$$

- $p_i \in Var_{\mathcal{L}_{\Box, \Diamond}}$ , где  $i \in \mathbb{N}$ ,  $Var_{\mathcal{L}_{\Box, \Diamond}}$  – счетное множество проп. пер. (будем обозначать как  $p, q, r, \dots$ ) (в дальнейшем нижний индекс  $Var_{\mathcal{L}_{\Box, \Diamond}}$  будет опускаться);
- $(A \Box \rightarrow B)$  – выражение с сильной кондициональной (контрфактической) связкой, читается как «если бы было  $A$ , то обязательно было бы  $B$ »;
- $(A \Diamond \rightarrow B)$  – выражение со слабой кондициональной (контрфактической) связкой, читается как «если бы было  $A$ , то, вероятно, было бы  $B$ ».

Введем следующие **метадефиниции**:

- $\perp := (A \wedge \neg A)$  для произв.  $A \in Fm$
- $\top := (\perp \rightarrow \perp)$ ;
- $(A \leftrightarrow B) := ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$ .

## Синтаксис кондиционально-интуиционистских логик

Зададим понятие **формулы** посредством следующей грамматики (в форме BN) в языке  $\mathcal{L}_{\Box, \Diamond}$  (множество всех формул будем обозначать как  $Fm_{\mathcal{L}_{\Box, \Diamond}}$ , в дальнейшем опуская нижний индекс для удобства):

### Определение

$$A, B := p_i \mid \neg A \mid (A \wedge B) \mid (A \vee B) \mid (A \rightarrow B) \mid (A \Box \rightarrow B) \mid (A \Diamond \rightarrow B)$$

- $p_i \in Var_{\mathcal{L}_{\Box, \Diamond}}$ , где  $i \in \mathbb{N}$ ,  $Var_{\mathcal{L}_{\Box, \Diamond}}$  – счетное множество проп. пер. (будем обозначать как  $p, q, r, \dots$ ) (в дальнейшем нижний индекс  $Var_{\mathcal{L}_{\Box, \Diamond}}$  будет опускаться);
- $(A \Box \rightarrow B)$  – выражение с сильной кондициональной (контрфактической) связкой, читается как «если бы было  $A$ , то обязательно было бы  $B$ »;
- $(A \Diamond \rightarrow B)$  – выражение со слабой кондициональной (контрфактической) связкой, читается как «если бы было  $A$ , то, вероятно, было бы  $B$ ».

Введем следующие **метадефиниции**:

- $\perp := (A \wedge \neg A)$  для произв.  $A \in Fm$
- $\top := (\perp \rightarrow \perp)$ ;
- $(A \leftrightarrow B) := ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$ .

Также примем соглашение об опускании внешних скобок.

Связка  $\Diamond \rightarrow$  рассматривается как **примитивный** кондициональный (контрфактуальный) оператор:  $\Diamond \rightarrow$  не определяется через  $\Box \rightarrow$  и  $\neg$ , как это имеет место в классическом контексте (Lewis 1973, p. 2):

$$A \Diamond \rightarrow B := \neg(A \Box \rightarrow \neg B).$$

## Синтаксис кондиционально-интуиционистских логик

Связка  $\Diamond \rightarrow$  рассматривается как **примитивный** кондициональный (контрфактуальный) оператор:  $\Diamond \rightarrow$  не определяется через  $\Box \rightarrow$  и  $\neg$ , как это имеет место в классическом контексте (Lewis 1973, p. 2):

$$A \Diamond \rightarrow B := \neg(A \Box \rightarrow \neg B).$$

Независимость слабой кондициональной связки может быть доказана прямым образом аргументами, аналогичными при демонстрации независимости модальностей  $\Box$  и  $\Diamond$  в интуиционистской модальной логике **IK** (Simpson 1994, p. 54–55; Balbiani 2024, p. 13:6), то есть можно обосновать следующий факт: не сущ. ф-лы  $A$ , свободной от  $\Box \rightarrow$ , т.ч.  $(p \Box \rightarrow q) \leftrightarrow A$ , и не сущ. ф-лы  $A$ , свободной от  $\Diamond \rightarrow$ , т.ч.  $(p \Diamond \rightarrow q) \leftrightarrow A$ , для произв.  $p, q \in Var$ .

## Синтаксис кондиционально-интуиционистских логик

Связка  $\Diamond \rightarrow$  рассматривается как **примитивный** кондициональный (контрфактуальный) оператор:  $\Diamond \rightarrow$  не определяется через  $\Box \rightarrow$  и  $\neg$ , как это имеет место в классическом контексте (Lewis 1973, p. 2):

$$A \Diamond \rightarrow B := \neg(A \Box \rightarrow \neg B).$$

Независимость слабой кондициональной связки может быть доказана прямым образом аргументами, аналогичными при демонстрации независимости модальностей  $\Box$  и  $\Diamond$  в интуиционистской модальной логике **IK** (Simpson 1994, p. 54–55; Balbiani 2024, p. 13:6), то есть можно обосновать следующий факт: не сущ. ф-лы  $A$ , свободной от  $\Box \rightarrow$ , т.ч.  $(p \Box \rightarrow q) \leftrightarrow A$ , и не сущ. ф-лы  $A$ , свободной от  $\Diamond \rightarrow$ , т.ч.  $(p \Diamond \rightarrow q) \leftrightarrow A$ , для произв.  $p, q \in Var$ .

Тем самым необходимы дедуктивные принципы, фиксирующие поведение  $\Diamond \rightarrow$  в интуиционистском контексте.

## Схемы аксиом

- 1 Схемы аксиом **интуиционистского** проп. исч.:  $A \rightarrow (B \rightarrow A), \dots$
- 2  $(A \Box \rightarrow (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \Box \rightarrow B) \wedge (A \Box \rightarrow C)) \quad (CMC_{\Box \rightarrow})$
- 3  $A \Box \rightarrow \top \quad (LT_{\Box \rightarrow})$
- 4  $(A \Diamond \rightarrow (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \Diamond \rightarrow B) \vee (A \Diamond \rightarrow C)) \quad (CMC_{\Diamond \rightarrow})$
- 5  $\neg(A \Diamond \rightarrow \perp) \quad (N_{\Diamond \rightarrow})$
- 6  $((A \Diamond \rightarrow B) \rightarrow (A \Box \rightarrow C)) \rightarrow (A \Box \rightarrow (B \rightarrow C)) \quad (CFS1)$
- 7  $(A \Diamond \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \Box \rightarrow B) \rightarrow (A \Diamond \rightarrow C)) \quad (CFS2)$

## Схемы аксиом

- 1 Схемы аксиом **интуиционистского** проп. исч.:  $A \rightarrow (B \rightarrow A), \dots$
- 2  $(A \Box \rightarrow (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \Box \rightarrow B) \wedge (A \Box \rightarrow C))$  ( $CMC_{\Box \rightarrow}$ )
- 3  $A \Box \rightarrow \top$  ( $LT_{\Box \rightarrow}$ )
- 4  $(A \Diamond \rightarrow (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \Diamond \rightarrow B) \vee (A \Diamond \rightarrow C))$  ( $CMC_{\Diamond \rightarrow}$ )
- 5  $\neg(A \Diamond \rightarrow \perp)$  ( $N_{\Diamond \rightarrow}$ )
- 6  $((A \Diamond \rightarrow B) \rightarrow (A \Box \rightarrow C)) \rightarrow (A \Box \rightarrow (B \rightarrow C))$  ( $CFS1$ )
- 7  $(A \Diamond \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \Box \rightarrow B) \rightarrow (A \Diamond \rightarrow C))$  ( $CFS2$ )

## Правила вывода

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B} \quad (\text{MP})$$

$$\frac{A \leftrightarrow B}{C \circ A \leftrightarrow C \circ B} \quad (\text{RCEC}_{\circ})$$

$$\frac{A \leftrightarrow B}{A \circ C \leftrightarrow B \circ C} \quad (\text{RCEA}_{\circ}),$$

где  $\circ \in \{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow\}$

## Определение

Базовая интуиционистская кондициональная логика **IntCK** есть наименьшее множество  $L \subseteq Fm_{\mathcal{L}_{\Box, \Diamond}}$ , т.ч.:

- $L$  содержит все частные случаи представленных схем аксиом;
- $L$  замкнуто относительно правил **MP**, **RCEC**<sub>○</sub>, **RCEA**<sub>○</sub>, где  $\circ \in \{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow\}$ .

## Определение

$\vdash_{\text{IntCK}} A$  (формула  $A$  есть **теорема IntCK**)  $\iff A \in \text{IntCK}$ .

## Определение

$\vdash_{\text{IntCK}} A$  (формула  $A$  есть теорема IntCK)  $\iff A \in \text{IntCK}$ .

## Примечание

В формулировках правил  $\text{RCEC}_\circ$  и  $\text{RCEA}_\circ$ ,  $\circ \in \{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow\}$ , посылка, то есть формула  $A \leftrightarrow B$ , должна быть теоремой IntCK. Следуя С. Лью (Liu 2018), будем называть такие правила метавыводами вывода.

## Определение

$\vdash_{\text{IntCK}} A$  (формула  $A$  есть **теорема IntCK**)  $\iff A \in \text{IntCK}$ .

## Примечание

В формулировках правил  $\text{RCEC}_\circ$  и  $\text{RCEA}_\circ$ ,  $\circ \in \{\Box\rightarrow, \Diamond\rightarrow\}$ , посылка, то есть формула  $A \leftrightarrow B$ , **должна быть теоремой IntCK**. Следуя С. Лью (Liu 2018), будем называть такие правила **метаправилами вывода**.

## Определение

Пусть  $\Gamma \cup \{A\} \subseteq \text{Fm}_{\Box\rightarrow, \Diamond\rightarrow}$ . Тогда  $\Gamma \vdash_{\text{IntCK}} A$  (из множества формул  $\Gamma$  **выводима** формула  $A$ )  $\iff \exists A_1, \dots, A_n$ , где  $A_n \equiv A$ , и каждая формула  $A_i$  для  $1 \leq i \leq n$  есть либо частный случай схемы аксиом IntCK, либо  $A_i \in \Gamma$ , либо получена из формул  $A_k, A_j$ , т.ч.  $k, j < i$ , по правилу MP, либо получена из формулы  $A_m$ , т.ч.  $m < i$ , по правилу  $\text{RCEC}_\circ$  или  $\text{RCEA}_\circ$ ,  $\circ \in \{\Box\rightarrow, \Diamond\rightarrow\}$ , причем  $A_m \in \text{IntCK}$ .

## Примечание

Предложенная аксиоматика в одном аспекте отличается от той, которая была предложена Г.К. Ольховиковым: вместо аксиомы  $CFS2$  у Г. Ольховикова фигурирует схема  $((A \Diamond B) \wedge (A \Box C)) \rightarrow (A \Diamond (B \wedge C))$ .

Однако нетрудно показать, что эти аксиоматики являются эквивалентными в том смысле, что при допущении одной из этих схем в качестве исходной выводима как теорема другая, и наоборот.

Мы выбираем формулировку с аксиомой  $CFS2$ , ввиду того что для алетического случая она являлась исторически первой, к тому же схемы  $CFS1$  и  $CFS2$  позволяют фиксировать фундаментальные свойства взаимоотношений двух контрфактических кондиционалов и интуиционистской импликации, причем данные взаимоотношения прямо корреспондируют определенным связям, существующим между отношениями достижимости в биреляционной семантике.

## Примеры

|                                                                                                                          |                               |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|
| $A / (B \Box \rightarrow A)$                                                                                             | $(Nec_{\Box \rightarrow})$    |
| $A \rightarrow B / ((C \Box \rightarrow A) \rightarrow (C \Box \rightarrow B))$                                          | $(RM_{\Box \rightarrow})$     |
| $A \rightarrow B / ((C \Diamond \rightarrow A) \rightarrow (C \Diamond \rightarrow B))$                                  | $(RM_{\Diamond \rightarrow})$ |
| $(A \Box \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \Box \rightarrow B) \rightarrow (A \Box \rightarrow C))$         | $(CK_{\Box \rightarrow})$     |
| $(A \Box \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \Diamond \rightarrow B) \rightarrow (A \Diamond \rightarrow C))$ | $(CK_{\Diamond \rightarrow})$ |
| $\neg(A \Diamond \rightarrow B) \leftrightarrow (A \Box \rightarrow \neg B)$                                             | $(T3)$                        |
| $(A \Box \rightarrow B) \rightarrow \neg(A \Diamond \rightarrow \neg B)$                                                 | $(T4)$                        |
| $(A \Diamond \rightarrow B) \rightarrow \neg(A \Box \rightarrow \neg B)$                                                 | $(T5)$                        |
| $(A \Diamond \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \Box \rightarrow B)$                                                 | $(T6)$                        |

причем в правилах  $Nec_{\Box \rightarrow}$ ,  $RM_{\Box \rightarrow}$  и  $RM_{\Diamond \rightarrow}$  формулы  $A$  и  $A \rightarrow B \in \mathbf{IntCK}$ .

## Пример доказательства в IntCK

$\vdash_{\text{IntCK}} (A \diamondrightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \Boxrightarrow B) \quad (\text{T6})$

1  $B \rightarrow ((B \rightarrow \perp) \rightarrow \perp) - \text{Int}$

2  $(A \Boxrightarrow B) \rightarrow (A \Boxrightarrow ((B \rightarrow \perp) \rightarrow \perp)) - RM_{\Boxrightarrow} 1$

3  $(A \Boxrightarrow ((B \rightarrow \perp) \rightarrow \perp)) \rightarrow ((A \diamondrightarrow (B \rightarrow \perp)) \rightarrow (A \diamondrightarrow \perp)) - \text{ч.с. } CK_{\diamondrightarrow}$

4  $(A \Boxrightarrow B) \rightarrow ((A \diamondrightarrow (B \rightarrow \perp)) \rightarrow (A \diamondrightarrow \perp)) - \text{прав. вывода на осн. т. Int, 2, 3}$

5  $(A \diamondrightarrow (B \rightarrow \perp)) \rightarrow ((A \Boxrightarrow B) \rightarrow (A \diamondrightarrow \perp)) - \text{прав. вывода на осн. т. Int, 4}$

6  $((A \Boxrightarrow B) \rightarrow (A \diamondrightarrow \perp)) \rightarrow (\neg(A \diamondrightarrow \perp) \rightarrow \neg(A \Boxrightarrow B)) - \text{Int}$

7  $(A \diamondrightarrow (B \rightarrow \perp)) \rightarrow (\neg(A \diamondrightarrow \perp) \rightarrow \neg(A \Boxrightarrow B)) - \text{прав. вывода на осн. т. Int, 5, 6}$

8  $\neg(A \diamondrightarrow \perp) - \text{IntCK 14}$

9  $(A \diamondrightarrow (B \rightarrow \perp)) \rightarrow \neg(A \Boxrightarrow B) - \text{прав. вывода на осн. т. Int, 8, 7}$

10  $\neg B \rightarrow (B \rightarrow \perp) - \text{Int}$

11  $(A \diamondrightarrow \neg B) \rightarrow (A \diamondrightarrow (B \rightarrow \perp)) - RM_{\diamondrightarrow} 10$

12  $(A \diamondrightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \Boxrightarrow B) - \text{прав. вывода на осн. т. Int, 11, 9}$

## Аксиомы для расширений **IntCK**

Гильбертовские системы для более сильных интуиционистских условных логик строятся посредством добавления к аксиоматике **IntCK** следующих схем аксиом, определяющих различные формы поведения кондicionалов.

| Название                                        | Схема аксиом                                                                                                                                                                                                                         |
|-------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $ID_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow}$   | $A \Box \rightarrow A$                                                                                                                                                                                                               |
| $CMP_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow}$  | $((A \Box \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)) \wedge ((A \wedge B) \rightarrow (A \Diamond \rightarrow B))$                                                                                                                |
| $S4C_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow}$  | $((A \wedge B) \Diamond \rightarrow \top) \rightarrow (A \Diamond \rightarrow \top)$                                                                                                                                                 |
| $ICV_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow}$  | $((A \Box \rightarrow C) \wedge (A \Diamond \rightarrow B)) \rightarrow ((A \wedge B) \Box \rightarrow C) \wedge (((A \Diamond \rightarrow B) \wedge ((A \wedge B) \Diamond \rightarrow C)) \rightarrow (A \Diamond \rightarrow C))$ |
| $ILT_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow}$  | $((A \wedge B) \Box \rightarrow C) \rightarrow (A \Box \rightarrow (B \rightarrow C)) \wedge ((A \Diamond \rightarrow (B \wedge C)) \rightarrow ((A \wedge B) \Diamond \rightarrow C))$                                              |
| $CS_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow}$   | $((A \wedge B) \rightarrow (A \Box \rightarrow B)) \wedge ((A \Diamond \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B))$                                                                                                                |
| $iMOD_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow}$ | $(A \Box \rightarrow \neg A) \rightarrow (B \Box \rightarrow \neg A)$                                                                                                                                                                |
| $CMon_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow}$ | $((A \Box \rightarrow C) \wedge (A \Box \rightarrow B)) \rightarrow ((A \wedge B) \Box \rightarrow C) \wedge (((A \wedge B) \Diamond \rightarrow C) \wedge (A \Box \rightarrow B)) \rightarrow (A \Diamond \rightarrow C)$           |
| $CCut_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow}$ | $((A \Box \rightarrow B) \wedge ((A \wedge B) \Box \rightarrow C)) \rightarrow (A \Box \rightarrow C) \wedge ((A \Box \rightarrow B) \wedge (A \Diamond \rightarrow C)) \rightarrow ((A \wedge B) \Diamond \rightarrow C)$           |
| $NORM_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow}$ | $\top \Diamond \rightarrow \top$                                                                                                                                                                                                     |

## Аксиомы для расширений **IntCK**

Гильбертовские системы для более сильных интуиционистских условных логик строятся посредством добавления к аксиоматике **IntCK** следующих схем аксиом, определяющих различные формы поведения кондicionалов.

| Название                | Схема аксиом                                                                                                                                                                                                                         |
|-------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $ID_{\Box, \Diamond}$   | $A \Box \rightarrow A$                                                                                                                                                                                                               |
| $CMP_{\Box, \Diamond}$  | $((A \Box \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)) \wedge ((A \wedge B) \rightarrow (A \Diamond \rightarrow B))$                                                                                                                |
| $S4C_{\Box, \Diamond}$  | $((A \wedge B) \Diamond \rightarrow \top) \rightarrow (A \Diamond \rightarrow \top)$                                                                                                                                                 |
| $ICV_{\Box, \Diamond}$  | $((A \Box \rightarrow C) \wedge (A \Diamond \rightarrow B)) \rightarrow ((A \wedge B) \Box \rightarrow C) \wedge (((A \Diamond \rightarrow B) \wedge ((A \wedge B) \Diamond \rightarrow C)) \rightarrow (A \Diamond \rightarrow C))$ |
| $ILT_{\Box, \Diamond}$  | $((A \wedge B) \Box \rightarrow C) \rightarrow (A \Box \rightarrow (B \rightarrow C)) \wedge ((A \Diamond \rightarrow (B \wedge C)) \rightarrow ((A \wedge B) \Diamond \rightarrow C))$                                              |
| $CS_{\Box, \Diamond}$   | $((A \wedge B) \rightarrow (A \Box \rightarrow B)) \wedge ((A \Diamond \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B))$                                                                                                                |
| $iMOD_{\Box, \Diamond}$ | $(A \Box \rightarrow \neg A) \rightarrow (B \Box \rightarrow \neg A)$                                                                                                                                                                |
| $CMon_{\Box, \Diamond}$ | $((A \Box \rightarrow C) \wedge (A \Box \rightarrow B)) \rightarrow ((A \wedge B) \Box \rightarrow C) \wedge (((A \wedge B) \Diamond \rightarrow C) \wedge (A \Box \rightarrow B)) \rightarrow (A \Diamond \rightarrow C)$           |
| $CCut_{\Box, \Diamond}$ | $((A \Box \rightarrow B) \wedge ((A \wedge B) \Box \rightarrow C)) \rightarrow (A \Box \rightarrow C) \wedge ((A \Box \rightarrow B) \wedge (A \Diamond \rightarrow C)) \rightarrow ((A \wedge B) \Diamond \rightarrow C)$           |
| $NORM_{\Box, \Diamond}$ | $\top \Diamond \rightarrow \top$                                                                                                                                                                                                     |

**Примечание.** Аксиомы  $ICV_{\Box, \Diamond}$  и  $ILT_{\Box, \Diamond}$  представляют собой разбиение оригинальной льюсовской аксиомы в форме:  $(A \Box \rightarrow \neg B) \vee (((A \wedge B) \Box \rightarrow C) \leftrightarrow (A \Box \rightarrow (B \rightarrow C)))$  (Lewis 1973, p. 132).

## Определение

Следующие системы являются **слабыми и льюисовскими** расширениями базовой интуиционистской кондициональной логики **IntCK**:

- $\text{IntCKD} := \text{IntCK} \oplus ID_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow};$
- $\text{IntCKW} := \text{IntCK} \oplus CMP_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow};$
- $\text{IntCK}^+ := \text{IntCKD} \oplus CMP_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow};$
- $\text{IntV} := \text{IntCKD} \oplus iMOD_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow} \oplus ICV_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow} \oplus ILT_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow};$
- $\text{IntVS} := \text{IntV} \oplus CS_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow};$
- $\text{IntVW} := \text{IntV} \oplus CMP_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow};$
- $\text{IntVC} := \text{IntVW} \oplus CS_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow};$
- $L_{cl} := L \setminus \{iMOD_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow}\} \oplus S4C_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow}, L \in \{\text{IntV}, \text{IntVS}, \text{IntVW}, \text{IntVC}\}.$

Логика семейства **V** будем называть **логиками Льюиса** (Lewis 1971; Lewis 1973, pp. 131–132). Для интуиционистских логик мы адаптируем несколько иную формулировку этих логик, представленную К. Сегербергом и С. Линдстрёмом (Lindström, Segerberg 2007, pp. 1190–1191).

## Определение

Следующие системы являются **интермедияльными** расширениями IntCK:

- $\text{IntCE}^- := \text{IntCK} \oplus \text{NORM}_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow};$
- $\text{IntCE} := \text{IntCK} \oplus \text{NORM}_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow} \oplus \text{CS}_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow};$
- $\text{IntC} := \text{IntCK} \oplus \text{ID}_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow} \oplus \text{CMon}_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow} \oplus \text{CCut}_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow}.$

### Логики Льюиса в формулировке И. Чиарделли и С. Лью (Ciardelli, Liu 2020)

Несколько иную формулировку предлагают И. Чиарделли и С. Лью логик семейства  $V$  – необходимо заменить схему  $MOD_{\Box, \Diamond}$  на схему  $S4C_{\Box, \Diamond}$  в формулировках исчислений **IntV**, **IntVS**, **IntVW** и **IntVC** (логики  $L_{cl}$ ,  $L \in \{\text{IntV}, \text{IntVS}, \text{IntVW}, \text{IntVC}\}$ ).

Это связано с их несколько иным семантическим подходом к интуиционистским кондициональным логикам с одной-единственной контрфактической связкой  $>$ .

Как можно заметить, эти конъюнктивные схемы состоят, по сути, из двух аксиом: первый левый конъюнкт говорит что-то о сильной контрфактической связи, тогда как второй правый конъюнкт по преимуществу о слабой. Также нетрудно заметить, что левые конъюнкты данных схем представляют собой в точности схемы известных в профессиональной литературе схем аксиом для стандартных кондициональных логик (Nute 1980; Nute, Cross 2002; Unterhuber 2013; Wen 2019; Arlo-Costa, Egré, Rott 2021). Схемы же на местах второго конъюнкта данных аксиом представляют собой двойственные аналоги схем левых конъюнктов – в классическом случае эти схемы были бы эквивалентны в силу наличия законов взаимовыразимости:  $(A \Box \rightarrow B) \leftrightarrow \neg(A \Diamond \rightarrow \neg B)$  и  $(A \Diamond \rightarrow B) \leftrightarrow \neg(A \Box \rightarrow \neg B)$ , – а также теоремы двойственности (Lewis 1973, pp. 2, 21). Однако в системе **IntCK** данные связи не являются взаимовыразимыми, а потому они не следуют друг из друга.

Для того чтобы получить полные относительно формулируемой биреляционной семантики системы, необходимо постулировать обе версии этих аксиом. Здесь также можно обнаружить параллель с нормальными расширениями модальной интуиционистской логики **IntK**: так, например, чтобы получить полную аксиоматику для интуиционистского аналога **S4** в языке  $\mathcal{L}_{\Box\Diamond}$ , недостаточно постулировать аксиому **4**  $\Box A \rightarrow \Box\Box A$ : ввиду отсутствия закона снятия двойного отрицания (и, как следствия, взаимовыразимости) из аксиомы  $\Box A \rightarrow \Box\Box A$  не может быть выведена двойственная схема  $\Diamond\Diamond A \rightarrow \Diamond A$  (Amati, Pirri 1993), а потому должна быть введена как исходная наравне с  $\Box A \rightarrow \Box\Box A$ . Аналогичная ситуация возникает и в отношении расширений альтернативной кондиционально-интуиционистской логики **IntCK**: все двойственные аксиомам со связкой  $\Box \rightarrow$  формулы должны рассматриваться как отдельные самостоятельные аксиомы, характеризующие поведение  $\Diamond \rightarrow$ .

Однако здесь возможны некоторые исключения: схемы аксиом  $ID_{\Box \rightarrow, \Diamond}$  и  $S4C_{\Box \rightarrow, \Diamond}$  формулируются без двойственных формул  $\neg(A \Diamond \rightarrow \neg A)$  и  $(A \Box \rightarrow \perp) \rightarrow ((A \wedge B) \Box \rightarrow \perp)$ , соответственно, ввиду доказуемой избыточности этих схем при добавлении их в системы как исходных. Аксиома  $MOD_{\Box \rightarrow, \Diamond}$  также не требует дуального аналога из-за особого корреспондирующего ограничения на отношение достижимости: для доказательства каноничности этой логики достаточно иметь аксиому в предложенном варианте.

## Выводимость дуала $\neg(A \diamondrightarrow \neg A)$ из схемы $A \Boxrightarrow A$

В качестве примера представим выводимость схемы  $\neg(A \diamondrightarrow \neg A)$  как теоремы при допущении  $A \Boxrightarrow A$  в качестве исходного постулата.

- 1  $A \Boxrightarrow A$  – условие
- 2  $(A \Boxrightarrow A) \rightarrow \neg\neg(A \Boxrightarrow A)$  – **Int**
- 3  $\neg\neg(A \Boxrightarrow A)$  – **MP** 1, 2
- 4  $(A \diamondrightarrow \neg A) \rightarrow \neg(A \Boxrightarrow A)$  – ч.с. T6
- 5  $\neg\neg(A \Boxrightarrow A) \rightarrow \neg(A \diamondrightarrow \neg A)$  – прав. вывода на осн. т. **Int**, 4
- 6  $\neg(A \diamondrightarrow \neg A)$  – **MP** 3, 5

- Аксиома  $ICV_{\Box, \Diamond}$  (рациональная монотонность) могла быть сформулирована трояким образом: во-первых, так, как она сформулирована нами, во-вторых, вместо формулы  $A \Diamond \rightarrow B$  могла фигурировать формула  $\neg(A \Box \rightarrow \neg B)$ , то есть имела бы вид  $((A \Box \rightarrow C) \wedge \neg(A \Box \rightarrow \neg B)) \rightarrow ((A \wedge B) \Box \rightarrow C)$ , и наконец, в-третьих, могла формулироваться так, как она формулируется у И. Чиараделли и С. Лью:  $(A \Box \rightarrow C) \rightarrow ((A \Box \rightarrow \neg B) \vee ((A \wedge B) \Box \rightarrow C))$  (Ciardelli, Liu 2019, pp. 50, 55; Ciardelli, Liu 2020, pp. 823, 829).
- Как мы увидим далее, ввиду отсутствия ограничения на замкнутость кондиционального отношения достижимости  $R$  в биреляционной семантике для **IntCK** и ее расширений отпадает надобность в формулировании этой аксиомы в том виде, как она представлена И. Чиараделли и С. Лью, то есть в третьей форме. Если принимать стандартное для этой аксиомы ограничение на отношение достижимости в виде  $R_{\|A\|}(w) \cap \|B\| \neq \emptyset \implies R_{\|A \wedge B\|}(w) \subseteq R_{\|A\|}(w)$  в биреляционной семантике, то сформулированная в нашем варианте аксиома дает самое естественное доказательство корреспондентности схемы соответствующему классу шкал, а также вполне прямое доказательство сильной полноты методом Генкина, пользуясь понятием канонических моделей.

- В этой связи Й. Вайс отмечает: «Оригинальная формулировка, которая подходит для языка, включающего только связку  $\Box \rightarrow$ , по-видимому, не соответствует никакому особенно информативному семантическому условию» (Weiss 2019, p. 134). К тому же сам Й. Вайс предлагает в качестве основной аксиомы для соответствующего расширения именно в форме  $(A \Box \rightarrow C) \rightarrow ((A \Diamond \rightarrow B) \rightarrow ((A \wedge B) \Box \rightarrow C))$ , однако не формулирует само это расширение, ссылаясь на сложности, связанные с формальным обоснованием такого типа логик, выходящих за рамки главы диссертации. Вайс там же пишет: «... детальный обзор интуиционистских систем кондициональной логики, язык которых обогащен обеими связками  $\Box \rightarrow$  и  $\Diamond \rightarrow$ , является довольно желательным предприятием...» (Weiss 2019, p. 134).

# Проблемы с определением интуиционистского аналога логики Сталнакера в языке

$\mathcal{L}_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow}$

Можно заметить, что мы не формулировали схему аксиом для интуиционистского аналога **C2** как расширения логики **IntCK**: это связано с тем, что мы не смогли найти естественное ограничение на отношение достижимости в соответствующей реляционной семантике, которое бы валидировало формулу  $(A \Box \rightarrow (B \vee C)) \rightarrow ((A \Box \rightarrow B) \vee (A \Box \rightarrow C))$ , но опровергало бы формулу  $(A \Box \rightarrow B) \vee (A \Box \rightarrow \neg B)$ . Вполне стандартное ограничение Сталнакера с некоторой модификацией (без этой модификации не будет общезначима даже схема  $(A \Box \rightarrow (B \vee C)) \rightarrow ((A \Box \rightarrow B) \vee (A \Box \rightarrow C))$ ), а именно  $\forall v \in \mathcal{R}(w) \exists u \in W (R_{\|A\|}(v) = \{u\})$ , валидирует закон *CEM*, что приводит вместе с аксиомой  $CMP_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow}$ , как показал Й. Вайс, к доказательству закона исключенного третьего  $A \vee \neg A$ . Поскольку **IntCK** удовлетворяет дезидератам А. Симпсона, данный факт тривиализирует интуиционистские аналоги предложенных кондициональных логик: они становятся классическими расширениями, а не интуиционистскими.

Тем самым поиск адекватного конструктивного аналога логики **C2** как расширения **IntCK** остается открытой проблемой. Формулировка ограничения в духе Чиарделли-Лью также не дала положительных результатов.

## Теорема (О погружении ИК в IntCK)

Интуиционистская модальная логика ИК погружается в IntCK.

ИК погружаема в IntCK посредством трансляции  $Tr: Fm_{\mathcal{L}_{\Box\Diamond}} \rightarrow Fm_{\mathcal{L}_{\Box\rightarrow, \Diamond}}$  при содействии вспомогательной трансляции  $\overline{Tr}: Fm_{\mathcal{L}_{\Box\rightarrow, \Diamond}} \rightarrow Fm_{\mathcal{L}_{\Box\Diamond}}$ , которые определяются индукцией по построению произвольных формул  $C \in Fm_{\mathcal{L}_{\Box\Diamond}}$ ,  $D \in Fm_{\mathcal{L}_{\Box\rightarrow, \Diamond}}$  следующим образом.

$$Tr(A) = A$$

$$A \in Var$$

$$Tr(\neg A) = \neg Tr(A)$$

$$Tr(A * B) = Tr(A) * Tr(B)$$

$$* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$$

$$Tr(\Box A) = \top \Box \rightarrow Tr(A)$$

$$Tr(\Diamond A) := \top \Diamond \rightarrow Tr(A)$$

$$\overline{Tr}(A) = A$$

$$A \in Var$$

$$\overline{Tr}(\neg A) = \neg \overline{Tr}(A)$$

$$\overline{Tr}(A * B) = \overline{Tr}(A) * \overline{Tr}(B)$$

$$* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$$

$$\overline{Tr}(A \Box \rightarrow B) = \Box \overline{Tr}(B)$$

$$\overline{Tr}(A \Diamond \rightarrow B) := \Diamond \overline{Tr}(B)$$

# Связь интуиционистской импликации с сильной контрфактической связкой $\Box \rightarrow$ в системе $\mathbf{IntCK}^+$ и ее расширениях

В отношении системы  $\mathbf{IntCK}^+$  и всех ее расширений верна следующая (мета)теорема (сформулируем ее для системы  $\mathbf{IntCK}^+$ ):

## Теорема

$\forall A, B \in Fm \ (\vdash_{\mathbf{IntCK}^+} A \rightarrow B \iff \vdash_{\mathbf{IntCK}^+} A \Box \rightarrow B).$

## Доказательство.

Зафиксируем произв.  $A, B \in Fm$ . Метаимпликация  $\Leftarrow$  обосновывается применением аксиомной схемы  $CMP_{\Box, \Diamond}$  и правила  $\mathbf{MP}$ . Обоснуем обратную метаимпликацию. Пусть  $\vdash_{\mathbf{IntCK}^+} A \rightarrow B$ . Применяя правило  $RM_{\Box}$ , имеем  $\vdash_{\mathbf{IntCK}^+} (A \Box \rightarrow A) \rightarrow (A \Box \rightarrow B)$ , откуда, используя аксиомную схему  $ID_{\Box, \Diamond}$  и правило  $\mathbf{MP}$ , получаем  $\vdash_{\mathbf{IntCK}^+} A \Box \rightarrow B$ . ■

- 1 Интуиционистские кондициональные логики: введение
- 2 Интуиционистские модальные и интуиционистские кондициональные логики
- 3 Синтаксис и теория доказательств гильбертовского типа
- 4 Кондициональная биреляционная семантика**
- 5 Отмеченные секвенциальные исчисления

## Определение

Кондициональной биреляционной шкалой назовем структуру  $\mathcal{F} = \langle W, \mathcal{R}, R, \mathcal{A} \rangle$ , т.ч.:

- $W \neq \emptyset$ , то есть  $W$  – непустое множество возможных миров (обозначение для миров:  $w, v, u, t, k$ );
- $\mathcal{R} \subseteq W \times W$ , причем  $Id_W \subseteq \mathcal{R}$  и  $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$ , то есть  $\mathcal{R}$  – интуиционистское отношение достижимости;
- $R \subseteq W \times W \times \mathcal{A}$  – кондициональное отношение достижимости, т.ч. оно индуцирует для всех  $X \in \mathcal{A}$  индексированное семейство отношений  $\{R_X\}_{X \in \mathcal{A}}$ , т.ч.  $R_X \subseteq W \times W$ , где  $\forall w, v \in W (R_X(w, v) \iff R(w, v, X))$ . Интуитивно,  $R_X$  указывает на достижимость мира  $v$  из некоторого мира  $w$ , имея в виду истинность гипотетического контекста  $X$  (пропозиции  $X$ ); для произвольного  $X \in \mathcal{A}$  выполняются следующие условия:

(IntC1)  $\mathcal{R} \circ R_X \subseteq R_X \circ \mathcal{R}$ ;

(IntC2)  $R_X \circ \mathcal{R}^{-1} \subseteq \mathcal{R}^{-1} \circ R_X$ ;

## Определение

■  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(W)$ , т.ч.:

- 1)  $\forall X, Y \in \mathcal{P}(W) (X, Y \in \mathcal{A} \Rightarrow X \cap Y \in \mathcal{A})$ ;
- 2)  $\forall X, Y \in \mathcal{P}(W) (X, Y \in \mathcal{A} \Rightarrow X \cup Y \in \mathcal{A})$ ;
- 3)  $\forall X \in \mathcal{P}(W) (X \in \mathcal{A} \Rightarrow \{w \in W \mid \forall v ((\langle w, v \rangle \in \mathcal{R} \Rightarrow v \notin X))\} \in \mathcal{A}_{\Box, \Diamond})$ ;
- 4)  $\forall X, Y \in \mathcal{P}(W) (X, Y \in \mathcal{A} \Rightarrow \{w \in W \mid \forall v ((\langle w, v \rangle \in \mathcal{R} \wedge v \in X) \Rightarrow v \in Y)\} \in \mathcal{A})$ ;
- 5)  $\forall X, Y \in \mathcal{P}(W) (X, Y \in \mathcal{A} \Rightarrow \{w \in W \mid \forall v \forall u ((\langle w, v \rangle \in \mathcal{R} \wedge \langle v, u \rangle \in R) \Rightarrow u \in Y)\} \in \mathcal{A})$ ;
- 6)  $\forall X, Y \in \mathcal{P}(W) (X, Y \in \mathcal{A} \Rightarrow \{w \in W \mid \exists v (\langle w, v, X \rangle \in R \wedge v \in Y)\} \in \mathcal{A})$ .

Семейство  $\mathcal{A}$  есть, неформально, множество пропозиций (пропозицией назовем множество миров, в которых истинна некоторая формула  $A$ ), в отношении которых производится оценка истинности консеквента контрфактуала в мирах, достижимых по отношению  $R_X$  (Segerberg 1989). С использованием вышеуказанных свойств нетрудно доказать важную теорему о представимости элементов  $\mathcal{A}$ , которая будет указана далее.

Будем вместо  $\langle w, v, X \rangle \in R$  писать  $wR_Xv$  или  $\langle w, v \rangle \in R_X$  (как отмечено ранее, всегда можно осмысленно задать такое двухместное отношение, индексированное пропозицией).

Аналогично с отношением  $\mathcal{R}$ .

## Понятие шкалы в биреляционной семантике IntCK

### Определение

Определим множества всех  $\mathcal{R}$ - и  $R$ -последовательностей для произвольного  $w \in W$  (также для произвольного  $X \in \mathcal{P}(W)$ ):  $\mathcal{R}(w) := \{v \in W \mid w\mathcal{R}v\}$  и  $R_X(w) := \{v \in W \mid wR_Xv\}$ .

Условия IntC1 и IntC2 аналитически можно переписать следующим образом:

$$1 \quad \forall w, v, u \in W \quad \forall X \in \mathcal{A} \quad ((wR_Xv \wedge v\mathcal{R}u) \Rightarrow \exists t \in W \quad (w\mathcal{R}t \wedge tR_Xu)) \quad (\text{IntC1})$$

$$2 \quad \forall w, v, u \in W \quad \forall X \in \mathcal{A} \quad ((wR_Xv \wedge w\mathcal{R}u) \Rightarrow \exists t \in W \quad (uR_Xt \wedge v\mathcal{R}t)) \quad (\text{IntC2})$$

Чисто технически эти условия в таком виде вводятся для того, чтобы с имеющимися определениями условий истинности для двух контрфактических связок  $\Box \rightarrow$ ,  $\Diamond$  была доказуема стандартная теорема о наследовании (теорема о монотонности), а также некоторые теоремы о взаимодействии сильной и слабой контрфактических связей (аксиома CFS1), при этом будет гарантироваться, что связка  $\Diamond$  является «нормальной», то есть удовлетворяет свойству дистрибутивности относительно  $\vee$ .

### Определение

Пусть  $\mathcal{F} = \langle W, \mathcal{R}, \mathcal{A}, R \rangle$  – кондициональная биреляционная шкала. Тогда **кондициональная биреляционная модель** есть структура  $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V_{\Box, \Diamond} \rangle$ , где  $V_{\Box, \Diamond}: Var \rightarrow \mathcal{A}$  является биреляционной оценкой (совпадает с понятием *int*-оценки), сопоставляющей каждой пропозициональной переменной некоторую пропозицию из  $\mathcal{A}$  и удовлетворяющей **условию монотонности**:

$$\forall i \in \mathbb{N} \forall p_i \in Var \forall w, v \in W \left( (w \in V_{\Box, \Diamond}(p_i) \wedge w \mathcal{R} v) \implies v \in V_{\Box, \Diamond}(p_i) \right).$$

Далее будем опускать индекс оценки.

# Истинность формулы в точечной модели

Индукцией по построению произвольной формулы  $A$  определим отношение истинности  $\models$  в произвольной точечной модели (точечной моделью назовем пару  $\langle \mathcal{M}, w \rangle$ , т.ч.  $\mathcal{M}$  есть произвольная кондициональная биреляционная модель, а  $w \in W$ ) индукцией по построению  $A$  (Olkhovikov 2024).

## Определение

- $\mathcal{M}, w \models p_i \iff w \in V(p_i).$
- $\mathcal{M}, w \models \neg B \iff \forall v \in W (wRv \implies \neg(\mathcal{M}, v \models B)).$
- $\mathcal{M}, w \models B \wedge C \iff \mathcal{M}, w \models B \wedge \mathcal{M}, w \models C.$
- $\mathcal{M}, w \models B \vee C \iff \mathcal{M}, w \models B \vee \mathcal{M}, w \models C.$
- $\mathcal{M}, w \models B \rightarrow C \iff \forall v \in W (wRv \implies (\mathcal{M}, v \models B \implies \mathcal{M}, v \models C)).$
- $\mathcal{M}, w \models B \Box \rightarrow C \iff \forall v \in W (wRv \implies \forall u \in W (vR_{\|B\|_{\mathcal{M}}} u \implies \mathcal{M}, u \models C)).$
- $\mathcal{M}, w \models B \Diamond \rightarrow C \iff \exists v \in W (wR_{\|B\|_{\mathcal{M}}} v \wedge \mathcal{M}, v \models C),$

где  $\|B\|_{\mathcal{M}}$  есть пропозиция, индуцированная формулой  $B$ , определяемая как  $\|B\|_{\mathcal{M}} = \{w \in W \mid \mathcal{M}, w \models B\}$ ,  $\|B\|_{\mathcal{M}} \in \mathcal{A}$  (в дальнейшем указание на модель будет опускаться).

# Некоторые важные семантические теоремы

Стандартным образом формулируется и доказывается **теорема о наследовании**. (Для доказательства случая со связкой  $\diamond \rightarrow$  существенно использование условия **IntC2**.)

## Теорема (О монотонности)

Пусть  $\mathcal{M} = \langle W, \mathcal{R}, \mathcal{A}, R, V \rangle$  есть кондициональная биреляционная модель,  $A \in Fm$ . Тогда  $\forall w, v \in W ((w \mathcal{R} v \wedge M, w \models A) \implies M, v \models A)$ .

Следующая теорема указывает на то, что любая пропозиция, индуцированная некоторой формулой, содержится в семействе  $\mathcal{A}$ .

## Теорема (О представимости элементов $\mathcal{A}$ )

Пусть  $\mathcal{M} = \langle W, \mathcal{R}, \mathcal{A}, R, V \rangle$  – кондициональная биреляционная модель. Тогда  $\forall A \in Fm \parallel A \parallel \in \mathcal{A}$ .

## Теорема (О нормальности)

Пусть  $\mathcal{M} = \langle W, \mathcal{R}, \mathcal{A}, R, V \rangle$  – кондициональная биреляционная модель. Тогда

$$\forall B, C \in Fm \forall w \in W (\mathcal{M} \models B \leftrightarrow C \implies R_{\parallel B \parallel}(w) = R_{\parallel C \parallel}(w)).$$

## Ограничения на кондициональное отношение достижимости

Для арбитранных модели  $\mathcal{M}$ , мира  $w$ , формул  $A$  и  $B$  полагаем следующие возможные ограничения на кондициональное отношение достижимости:

- (C1)  $R_{\|A\|}(w) \subseteq \|A\|$  ( $\text{id}_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow}$ );
- (C2)  $w \in \|A\| \implies w \in R_{\|A\|}(w)$  ( $\text{cmp}_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow}$ );
- (C3)  $R_{\|A \wedge B\|}(w) \neq \emptyset \implies R_{\|A\|}(w) \neq \emptyset$  ( $\text{s4c}_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow}$ );
- (C4)  $R_{\|A\|}(w) \cap \|B\| \neq \emptyset \implies R_{\|A \wedge B\|}(w) \subseteq R_{\|A\|}(w)$  ( $\text{icv}_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow}$ );
- (C5)  $R_{\|A\|}(w) \cap \|B\| \subseteq R_{\|A \wedge B\|}(w)$  ( $\text{ilt}_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow}$ );
- (C6)  $w \in \|A\| \implies R_{\|A\|}(w) \subseteq \{w\}$  ( $\text{cs}_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow}$ );
- (C7)  $(\forall v \in \mathcal{R}(w) (R_{\|A\|}(v) \subseteq \|\neg A\|)) \implies R_{\|B\|}(w) \subseteq \|\neg A\|$  ( $\text{imod}_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow}$ );
- (C8)  $(\forall v \in \mathcal{R}(w) (R_{\|A\|}(v) \subseteq \|B\|)) \implies R_{\|A \wedge B\|}(w) \subseteq R_{\|A\|}(w)$  ( $\text{cmon}_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow}$ );
- (C9)  $(\forall v \in \mathcal{R}(w) (R_{\|A\|}(v) \subseteq \|B\|)) \implies R_{\|A\|}(w) \subseteq R_{\|A \wedge B\|}(w)$  ( $\text{ccut}_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow}$ );
- (C10)  $R_{\|\top\|}(w) \neq \emptyset$  ( $\text{norm}_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow}$ );

# Семантика для расширений IntCK

| Ограничение на отношение дост.                                                                                           | Корресп. схема аксиом                                                                                                 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $R_{\ A\ }(w) \subseteq \ A\ $                                                                                           | $A \Box \rightarrow A$                                                                                                |
| $w \in \ A\  \Rightarrow w \in R_{\ A\ }(w)$                                                                             | $((A \Box \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)) \wedge ((A \wedge B) \rightarrow (A \Diamond \rightarrow B))$ |
| $R_{\ A \wedge B\ }(w) \neq \emptyset \Rightarrow R_{\ A\ }(w) \neq \emptyset$                                           | $((A \wedge B) \Diamond \rightarrow \top) \rightarrow (A \Diamond \rightarrow \top)$                                  |
| $R_{\ A\ }(w) \cap \ B\  \neq \emptyset \Rightarrow R_{\ A \wedge B\ }(w) \subseteq R_{\ A\ }(w)$                        | $ICV_{\Box, \Diamond}$                                                                                                |
| $R_{\ A\ }(w) \cap \ B\  \subseteq R_{\ A \wedge B\ }(w)$                                                                | $ILT_{\Box, \Diamond}$                                                                                                |
| $w \in \ A\  \Rightarrow R_{\ A\ }(w) \subseteq \{w\}$                                                                   | $((A \wedge B) \rightarrow (A \Box \rightarrow B)) \wedge ((A \Diamond \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B))$ |
| $(\forall v \in \mathcal{R}(w) (R_{\ A\ }(v) \subseteq \ \neg A\ )) \Rightarrow R_{\ B\ }(w) \subseteq \ \neg A\ $       | $(A \Box \rightarrow \neg A) \rightarrow (B \Box \rightarrow \neg A)$                                                 |
| $(\forall v \in \mathcal{R}(w) (R_{\ A\ }(v) \subseteq \ B\ )) \Rightarrow R_{\ A \wedge B\ }(w) \subseteq R_{\ A\ }(w)$ | $CMon_{\Box, \Diamond}$                                                                                               |
| $(\forall v \in \mathcal{R}(w) (R_{\ A\ }(v) \subseteq \ B\ )) \Rightarrow R_{\ A\ }(w) \subseteq R_{\ A \wedge B\ }(w)$ | $CCut_{\Box, \Diamond}$                                                                                               |
| $R_{\ \top\ }(w) \neq \emptyset$                                                                                         | $\top \Diamond \rightarrow \top$                                                                                      |

$$ICV_{\Box, \Diamond} \quad (((A \Box \rightarrow C) \wedge (A \Diamond \rightarrow B)) \rightarrow ((A \wedge B) \Box \rightarrow C)) \wedge (((A \Diamond \rightarrow B) \wedge ((A \wedge B) \Diamond \rightarrow C)) \rightarrow (A \Diamond \rightarrow C))$$

$$ILT_{\Box, \Diamond} \quad (((A \wedge B) \Box \rightarrow C) \rightarrow (A \Box \rightarrow (B \rightarrow C))) \wedge ((A \Diamond \rightarrow (B \wedge C)) \rightarrow ((A \wedge B) \Diamond \rightarrow C))$$

$$CMon_{\Box, \Diamond} \quad (((A \Box \rightarrow C) \wedge (A \Box \rightarrow B)) \rightarrow ((A \wedge B) \Box \rightarrow C)) \wedge (((A \wedge B) \Diamond \rightarrow C) \wedge (A \Box \rightarrow B)) \rightarrow (A \Diamond \rightarrow C))$$

$$CCut_{\Box, \Diamond} \quad (((A \Box \rightarrow B) \wedge ((A \wedge B) \Box \rightarrow C)) \rightarrow (A \Box \rightarrow C)) \wedge (((A \Box \rightarrow B) \wedge (A \Diamond \rightarrow C)) \rightarrow ((A \wedge B) \Diamond \rightarrow C))$$

## Пример обоснования корреспондентности ограничения на отношение достижимости и схемы аксиом расширения

$\Rightarrow$

Зафиксируем произвольную кондициональную биреляционную шкалу  $\mathcal{F} = \langle \mathfrak{F}, \mathcal{A}, R \rangle \in \mathcal{C}_{\text{id}_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow}}$ , произвольную модель  $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$ , основанную на этой шкале, а также произвольные  $w, v, u \in W$ , т.ч.  $v \in \mathcal{R}(w)$ ,  $u \in R_{\|A\|}(v)$ . Ввиду того что  $\mathcal{F} \in \mathcal{C}_{\text{id}_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow}}$ , для  $v$  и  $A$  имеем  $R_{\|A\|}(v) \subseteq \|A\|$ , откуда, по определению теоретико-множественного включения,  $u \in \|A\|$ , то есть  $u \models A$ , а затем, обобщая и исключая допущения, применяя определение истинности  $\Box \rightarrow$ , получаем  $w \models A \Box \rightarrow A$ , откуда, обобщая,  $\mathcal{M} \models A \Box \rightarrow A$ .

## Пример обоснования корреспондентности ограничения на отношение достижимости и схемы аксиом расширения

⇒

Зафиксируем произвольную кондициональную биреляционную шкалу  $\mathcal{F} = \langle \mathfrak{F}, \mathcal{A}, R \rangle \in \mathcal{C}_{\text{id}_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow}}$ , произвольную модель  $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$ , основанную на этой шкале, а также произвольные  $w, v, u \in W$ , т.ч.  $v \in \mathcal{R}(w)$ ,  $u \in R_{\|A\|}(v)$ . Ввиду того что  $\mathcal{F} \in \mathcal{C}_{\text{id}_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow}}$ , для  $v$  и  $A$  имеем  $R_{\|A\|}(v) \subseteq \|A\|$ , откуда, по определению теоретико-множественного включения,  $u \in \|A\|$ , то есть  $u \models A$ , а затем, обобщая и исключая допущения, применяя определение истинности  $\Box \rightarrow$ , получаем  $w \models A \Box \rightarrow A$ , откуда, обобщая,  $\mathcal{M} \models A \Box \rightarrow A$ .

⇐

По контрапозиции. Положим шкалу  $\mathcal{F} \notin \mathcal{C}_{\text{id}_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow}}$ , то есть  $\exists w' \in W \exists X \in \mathcal{A} \exists w'' \in W w'' \in R_X(w')$ , но  $w'' \notin X$ . Зафиксируем такие  $w', w'' \in W$ ,  $X \in \mathcal{A}$ . Определим биреляционную модель  $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$ , основанную на этой шкале, т.ч.  $X = \|A\|$  для некоторой  $A \in \text{Fm}_{\mathcal{L}_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow}}$ . Тогда имеем  $w'' \not\models A$ ,  $w'' \in R_{\|A\|}(w')$ , а также, по рефлексивности  $\mathcal{R}$ ,  $w' \mathcal{R} w'$ . Следовательно, по определению ложности  $\Box \rightarrow$ ,  $w' \not\models A \Box \rightarrow A$ .

## Опровержимость $\neg\neg A \Box\rightarrow A$ в шкале $\mathcal{F}_{id_{\Box\rightarrow, \Diamond\rightarrow}}$

### Контрмодель

Положим модель  $\mathcal{M} = \langle W, \mathcal{R}, \mathcal{A}, R, V \rangle$ , т.ч.  $W = \{w, w_0, w_1, w_2\}$ ,  
 $\mathcal{R} = \{\langle w, w_0 \rangle, \langle w_1, w_2 \rangle, \langle w, w \rangle, \langle w_0, w_0 \rangle, \langle w_1, w_1 \rangle, \langle w_2, w_2 \rangle\}$ ,  $R_{\parallel \neg\rightarrow p \parallel} = \{\langle w_0, w_1 \rangle\}$ ,  $V(p) = \{w_2\}$ . Тогда нетрудно видеть, что  $w_1 \models \neg\neg p$  и  $w_1 \not\models p$ , тем самым имеем, по определению истинности  $\Box\rightarrow$ ,  $w \not\models \neg\neg p \Box\rightarrow p$ , при этом модель  $\mathcal{M}$  удовлетворяет свойству  $id_{\Box\rightarrow, \Diamond\rightarrow}$ . Следовательно, мы предъявили модель, удовлетворяющую свойству  $id_{\Box\rightarrow, \Diamond\rightarrow}$ , в которой конкретный случай схемы снятия двойного отрицания для контрфактуалов оказывается опровержимым, а значит,  $\mathcal{F}_{id_{\Box\rightarrow, \Diamond\rightarrow}} \not\models \neg\neg A \Box\rightarrow A$ .

- 1 Сильная корректность относительно всех кондициональных биреляционных шкал.
- 2 Сильная полнота относительно всех кондициональных биреляционных шкал.
- 3 Синтаксическая непротиворечивость.
- 4 Консервативность относительно **Int**.
- 5 Конечная аксиоматизируемость, финитная аппроксимируемость и, как следствие, разрешимость.
- 6 Наличие дизъюнктивного свойства.
- 7 Каноничность.
- 8 Компактность.
- 9 Нетабличность

# Консервативность расширений IntCK

## Теорема (Консервативность расширений IntCK)

Все рассмотренные исчисления в языке  $\mathcal{L}_{\Box, \Diamond}$  являются консервативными расширениями **Int**, то есть  $\forall A \in Fm_{\mathcal{L}_{\text{Int}}} (\vdash_{\mathbf{X}} A \iff \vdash_{\text{Int}} A)$ , где **X** – исчисление в языке  $\mathcal{L}_{\Box, \Diamond}$ .

Пусть  $A \in Fm_{\mathcal{L}_{\text{Int}}}$ , **X** – исчисление в языке  $\mathcal{L}_{\Box, \Diamond}$ . Метаимпликация  $\Leftarrow$  тривиальна ввиду  $\text{Int} \subseteq \mathbf{X}$ . Для доказательства обратной метаимпликации рекурсивно по произвольной формуле  $B \in Fm_{\mathcal{L}_{\Box, \Diamond}}$  определим отображение  $\zeta: Fm_{\mathcal{L}_{\Box, \Diamond}} \rightarrow Fm_{\mathcal{L}_{\text{Int}}}$  для всех  $C, D \in Fm_{\mathcal{L}_{\Box, \Diamond}}$  полагая

$$\zeta(p_i) = p_i \text{ для произв. } i \in \mathbb{N}, p_i \in Var$$

$$\zeta(\neg C) = \neg \zeta(C)$$

$$\zeta(C \nabla D) = \zeta(C) \nabla \zeta(D), \text{ где } \nabla \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$$

$$\zeta(C \Box \rightarrow D) = \zeta(C) \rightarrow \zeta(D)$$

$$\zeta(C \Diamond \rightarrow D) = \zeta(C) \wedge \zeta(D).$$

Возвратной индукцией по длине вывода формулы  $A$  в исчислении  $X$  нетрудно проверить, что  $\zeta$ -образ любого частного случая схемы аксиом  $X$  является теоремой **Int** и что при выводимости  $\zeta$ -образов в **Int** посылок правил  $X$  выводим в **Int** и  $\zeta$ -образ заключения. Нетрудно заметить, что  $\forall A \in \mathcal{L}_{\mathbf{Int}} A \models \zeta(A)$ , а потому если  $\vdash_X A$  (при этом, конечно,  $A \in Fm_{\mathcal{L}_{\Box \rightarrow, \Diamond \rightarrow}}$ ), то, в силу только что доказанного,  $\vdash_{\mathbf{Int}} \zeta(A)$ , но  $\zeta(A) \models A$ , следовательно,  $\vdash_{\mathbf{Int}} A$ .

- 1 Интуиционистские кондициональные логики: введение
- 2 Интуиционистские модальные и интуиционистские кондициональные логики
- 3 Синтаксис и теория доказательств гильбертовского типа
- 4 Кондициональная биреляционная семантика
- 5 Отмеченные секвенциальные исчисления**

## Маркированные (labelled) исчисления

- В исчислениях такого типа в качестве вспомогательных средств разрешается вводить синтаксические аналоги соответствующих семантических понятий, что является удобным средством при формулировании формализмов для неклассических логик, основанных на семантике возможных миров.

## Маркированные (labelled) исчисления

- В исчислениях такого типа в качестве вспомогательных средств разрешается вводить синтаксические аналоги соответствующих семантических понятий, что является удобным средством при формулировании формализмов для неклассических логик, основанных на семантике возможных миров.
- Маркеры (labels) при такой интерпретации будут являться аналогами миров, в которых на семантическом уровне некоторая формула с ассоциированным маркером истинна, причем отношение/отношения достижимости между мирами также имеет/имеют формальный аналог: так называемые реляционные атомы (relation atoms). Правила интродукции и элиминации в таких исчислениях, по сути, инкорпорируют семантические определения для логических констант, поэтому видна непосредственная связь с семантикой.

## Маркированные (labelled) исчисления

- В исчислениях такого типа в качестве вспомогательных средств разрешается вводить синтаксические аналоги соответствующих семантических понятий, что является удобным средством при формулировании формализмов для неклассических логик, основанных на семантике возможных миров.
- Маркеры (labels) при такой интерпретации будут являться аналогами миров, в которых на семантическом уровне некоторая формула с ассоциированным маркером истинна, причем отношение/отношения достижимости между мирами также имеет/имеют формальный аналог: так называемые реляционные атомы (relation atoms). Правила интродукции и элиминации в таких исчислениях, по сути, инкорпорируют семантические определения для логических констант, поэтому видна непосредственная связь с семантикой.
- Маркированные исчисления являются модулярными, легко адаптируемыми, унифицируемыми, позволяют единообразным способом описать синтаксическую теорию для различных расширений некоторой базовой логики: добавление или исключение структурных правил задает натуральные формализмы для разных систем внутри одного и того же класса (Viganò 2000; Indrzejczak 2010).

- 1 (Смирнов 2002) *Смирнов В.А.* Логические методы анализа научного знания / Под ред. В.Н. Садовского, В.А. Бочарова. М.: Эдиториал УРСС, 2002.
- 2 (Adams 1970) *Adams E.* Subjunctive and Indicative Conditionals // *Foundations of Language*. 1970. Vol. 6. No. 1. P. 89–94.
- 3 (Amati, Pirri 1993) *Amati G., Pirri F.* A Uniform Tableau Method for Intuitionistic Modal Logics I // *Studia Logica*. 1993. Vol. 53. No. 1. P. 29–60.
- 4 (Arlo-Costa, Egré, Rott 2021) *Arlo-Costa H., Egré P., Rott H.* The Logic of Conditionals // *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2021 Edition) / Ed. by E. Zalta, 2007. URL: <https://plato.stanford.edu/entries/logic-conditionals/> (дата обращения: 29.03.2024.)
- 5 (Balbani, Gao, Gencer, Olivetti 2024) *Balbani Ph., Gao H., Gencer Ç., Olivetti N.* A Natural Intuitionistic Modal Logic: Axiomatization and Bi-Nested Calculus // *Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs): 32nd EACSL Annual Conference on Computer Science Logic (CSL 2024)*, CSL 2024, February 19–23, 2024, Naples, Italy / Ed. by A. Murano, A. Silva. Saarbrücken; Wadern: Dagstuhl Publishing, 2024. P. 13:1–13:21.
- 6 (Bellin, De Paiva, Ritter 2001) *Bellin G., De Paiva V., Ritter E.* Extended Curry-Howard Correspondence for a Basic Constructive Modal Logic // *Proceedings of M4M-2 (2nd International Workshop on Methods for Modalities)*, 2001. URL: [https://www.researchgate.net/publication/2858332\\_Extended\\_Curry-Howard\\_Correspondence\\_for\\_a\\_Basic\\_Constructive\\_Modal\\_Logic](https://www.researchgate.net/publication/2858332_Extended_Curry-Howard_Correspondence_for_a_Basic_Constructive_Modal_Logic) (дата обращения: 01.04.2025.)

- 7 (Ciardelli, Liu 2020) *Ciardelli I., Liu X.* Intuitionistic Conditional Logics // Journal of Philosophical Logic. 2020. Vol. 49. No. 4. P. 807–832.
- 8 (Ciardelli, Liu 2019) *Ciardelli I., Liu X.* Minimal-Change Counterfactuals in Intuitionistic Logic // Logic, Rationality, and Interaction: 7th International Workshop, LORI 2019, Chongqing, China, October 18–21, 2019, Proceedings / Ed. by P. Blackburn, E. Lorini, M. Guo. Berlin; Heidelberg: Springer, 2019. P. 43–56.
- 9 (Chellas 1975) *Chellas B.F.* Basic Conditional Logic // Journal of Philosophical Logic. 1975. Vol. 5. No. 2. P. 133–153.
- 10 (Dalmonte 2020) *Dalmonte T.* Non-Normal Modal Logics: Neighbourhood Semantics and their Calculi. PhD Thesis. Marseille: Aix-Marseille University, 2020.
- 11 (Došen 1985) *Došen K.* Models for Stronger Normal Intuitionistic Modal Logics // Studia Logica. 1985. Vol. 44. No. 1. P. 39–70.
- 12 (Ewald 1986) *Ewald W.B.* Intuitionistic Tense and Modal Logic // Journal of Symbolic Logic. 1986. Vol. 51. No. 1. P. 166–179.
- 13 (Fischer Servi 1984) *Fischer Servi G.* Axiomatizations for Some Intuitionistic Modal Logics // Rendiconti del Seminario Matematico – PoliTO. 1984. Vol. 42. No. 3. P. 179–194.
- 14 (Indrzejczak 2010) *Indrzejczak A.* Natural Deduction, Hybrid Systems and Modal Logic. Dordrecht: Springer, 2010.
- 15 (Lewis 1971) *Lewis D.* Completeness and Decidability of Three Logics of Counterfactual Conditionals // Theoria. 1970. Vol. 37. No. 1. P. 74–85.

- 16 (Liu 2018) *Liu X.* Intuitionistic Lewisian Conditional Logics. Magister Thesis. München: Ludwig Maximilian University of Munich, 2018.
- 17 (Lindström, Segerberg 2007) *Lindström S., Segerberg K.* Modal Logic and Philosophy // Handbook of Modal Logic / Ed. by P. Blackburn, J. van Benthem, F. Wolter. Amsterdam: Elsevier, 2007. P.
- 18 (Nute, Cross 2002) *Nute D., Cross C.B.* Conditional Logic // Handbook of Philosophical Logic. Vol. 4. 2 Edn. / Ed. by D.M. Gabbay, F. Guenther. Dordrecht: Springer, 2002. P. 1–98.
- 19 (Nute 1980) *Nute D.* Topics in Conditional Logic. Dordrecht: D. Reidel, 1980.
- 20 (Olkhovikov 2024) *Olkhovikov G.K.* An Intuitionistically Complete System of Basic Intuitionistic Conditional Logic // Journal of Philosophical Logic. 2024. Vol. 53. No. 5. P. 1199–1240.
- 21 (Plotkin, Stirling 1986) *Plotkin G., Stirling C.* A Framework for Intuitionistic Modal Logics // Proceedings of TARK '96 (1st Conference on Theoretical Aspects of Reasoning about Knowledge). Burlington: Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1986. P. 399–406.
- 22 (Poggiolesi 2016) *Poggiolesi F.* Natural Deduction Calculi and Sequent Calculi for Counterfactual Logics // Studia Logica. 2016. Vol. 104. No 5. P. 1003–1036.
- 23 (Roy 2006) *Roy T.* Natural Deductions for Priest, An Introduction to Non-Classical Logic // Australasian Journal of Logic. 2006. Vol. 5. P. 47–192.
- 24 (Segerberg 1989) *Segerberg K.* Notes on Conditional Logic // Studia Logica. 1989. Vol. 48. No. 2. P. 157–168.

- 26 (Simpson 1994) *Simpson A.* The Proof Theory and Semantics of Intuitionistic Modal Logic. PhD Thesis. Edinburgh: University of Edinburgh, 1994.
- 27 (Sotirov 1980) *Sotirov V.H.* Modal Theories with Intuitionistic Logic // Mathematical Logic: Proceedings of the Conference on Mathematical Logic, Dedicated to the Memory of A.A. Markov (1903–1979), Sofia, September 22–23, 1980. Sofia: Bulgarian Academy of Sciences, 1984. P. 139–171.
- 28 (Stalnaker 1968) *Stalnaker R.C.* A Theory of Conditionals // Studies in Logical Theory / Ed. by N. Rescher. Oxford: Basil Blackwell, 1968. P. 98–112.
- 29 (Thomason 1970) *Thomason R.H.* A Fitch-Style Formulation of Conditional Logic // Logique et Analyse. 1970. Vol. 13. No. 52. P. 397–412.
- 30 (Unterhuber 2014) *Unterhuber M.* Possible Worlds Semantics for Indicative and Counterfactual Conditionals? A Formal-Philosophical Inquiry into Chellas-Segerberg Semantics. Frankfurt: Ontos Verlag, 2013.
- 31 (Viganò 2000) *Viganò L.* Labelled Non-Classical Logics. Dordrecht: Springer, 2000.
- 32 (Weiss 2018) *Weiss Y.* Basic Intuitionistic Conditional Logic // Journal of Philosophical Logic. 2018. Vol. 48. No. 3. P. 447–469.
- 33 (Weiss 2019) *Weiss Y.* Frontiers of Conditional Logic. PhD Thesis. New York: The City University of New York, 2019.
- 34 (Wen 2019) *Wen X.* On Axiomatization of Lewis' Conditional Logics, 2019. P. 1–18. URL: <https://arxiv.org/pdf/1910.06202> (дата обращения: 01.04.2025).

- 36 (Wijesekera 1990) *Wijesekera D.* Constructive Modal Logic I // *Annals of Pure and Applied Logic*. 1990. Vol. 50. No. 3. P. 271–301.
- 37 (Wolter, Zakharyashev 1999) *Wolter F., Zakharyashev M.* Intuitionistic Modal Logic // *Logic and Foundations of Mathematics* / Ed. by A. Cantini, E. Casari, P. Minari. Dordrecht: Springer, 1999. P. 227–238.